Απαντήσεις στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2016

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ.262-(i)
Α.2. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 141
Α.3 Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 246,247
Α.4. α. $\to$ **Λ** **β.** $\to$ **Σ** **γ.** $\to$ **Λ** **δ.** $\to$ **Σ** **ε.** $\to$ **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.
Το πρόσημο της f' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	$-$	**0**	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0 ίσο με $f(0)=0$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{(2x)'\left(x^2+1\right)^2-(2x)\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2\cdot x\cdot 2\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$\frac{2\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-6x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2\left(-3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Λύνουμε την εξίσωση, $\left\{\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(-3x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \ ή \ x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \ ή \ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$.

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f″		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Επομένως η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. Τα σημεία καμπής της συνάρτησης είναι τα $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

B3.
Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Θα μελετήσουμε αν η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

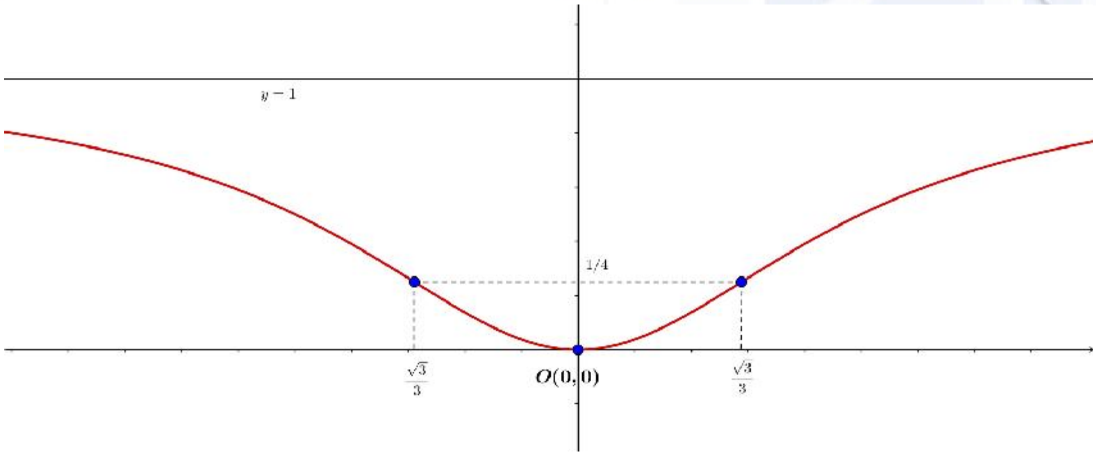
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$. Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$. Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$.

B4. Φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f′(x)		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f″(x)		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f(x)	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗	1

Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα Β1,Β2,Β3 η γραφική παράσταση της f είναι



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x^2}x-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $e^{x^2}-1=0\Leftrightarrow x=0$.

Είναι $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^{x^2}\geq e^0=1\Leftrightarrow e^{x^2}-1\geq 0$

Άρα το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του 2x και φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	−	**0**	+
f	↘		↗

Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0, το f(0) = 0 έχουμε f(x) ≥ 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0 άρα η εξίσωση f(x) =0 έχει μοναδική ρίζα το $x_0=0$.

Γ2. Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow x=0$, οπότε η συνεχής συνάρτηση f θα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ (ως συνεχής και διάφορη του μηδενός). Από τη σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ έχουμε ισοδύναμα

$|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$

Οι δυνατές περιπτώσεις του προσήμου της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f_1	+	0	+
f_2	-	0	-
f_3	+	0	-
f_4	-	0	+

Συνεπώς προκύπτουν οι εξής συνδυασμοί για τον τύπο της f

$f_1(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f_2(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$

ή $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & x\geq 0 \end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases} -(e^{x^2}-x^2-1), & x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$

Γ3. Έχουμε $f''(x)=4e^{x^2}x^2+2e^{x^2}-2=2(e^{x^2}-1)+4x^2e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

Ισχύει ότι $\begin{cases} x^2\geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1 \Leftrightarrow 2e^{x^2}\geq 2 \Leftrightarrow 2e^{x^2}-2\geq 0\ (1)\ \text{©~§}\ 4e^{x^2}x^2\geq 0\ (2) \\ \text{O®ό²£ ~®ό}(1)\,\&\,(2)\text{®° -©ύ®²£§}\ 4e^{x^2}x^2+2e^{x^2}-2\geq 0 \Leftrightarrow f''(x)\geq 0 \end{cases}$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0, οπότε η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4.

Για την εξίσωση $f(|\text{¦«}x|+3)-f(|\text{¦«}x|)=f(x+3)-f(x)\quad(1)$

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x)=f(x+3)-f(x)$ στο $[0,+\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$,με $g'(x)=f'(x+3)\cdot(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

Για τη μονοτονία της f' έχουμε ότι για $x<x+3 \overset{f'\nearrow[0,+\infty)}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x+3)\Rightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$

οπότε $g'(x)>0$ και συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα και

$''1-1''$ οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $g(|\text{¦«}x|)=g(x)\overset{g\ ''1-1''}{\Leftrightarrow}|\text{¦«}x|=x\Leftrightarrow x=0$

Αφού από τη θεωρία(σελ. 170) έχουμε ότι $|\text{¦«}x|\leq|x|$ και για $x\geq 0$ ισχύει $|\text{¦«}x|\leq x$ με την ισότητα να ισχύει για x=0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη σχέση $\int_0^{®}\left(f(x)+f\,”(x)\right)\text{¦«}x\,dx=®$ ισοδύναμα έχουμε,

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\cdot \eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0=\pi \Leftrightarrow\ f(\pi)+f(0)=\pi.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο x = 0.

οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (2)

Από τη δεδομένη σχέση $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\text{¦«}x}=1$, θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{\text{¦«}x}$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$. Οπότε

$f(x)=g(x)\cdot\text{¦«}x$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\text{¦«}x\right)=1\cdot 0$

όπου λόγω της (2) έχουμε $f(0)=0$ (3).

Από τις σχέσεις (1) και (2) και (3) παίρνουμε τελικά $f(®)=®$

Για το f′(0) έχουμε

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\text{¦«}x}\frac{\text{¦«}x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\text{¦«}x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{¦«}x}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Άρα f′(0) = 1

Δ 2α.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^x$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$ η οποία αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις έχουμε $e^{f(x)}f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^x$ (1)

Έστω ότι η f έχει ακρότατο στη θέση $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, από το Θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$ (2).

οπότε η σχέση (1) για x = x_0 γίνεται $e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow 1=e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=0$

οπότε $f'(0)=0$ ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(0)=1$

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Δ 2Β.
Επειδή

i. η f′ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)
ii. $f'(x)\neq 0$ για κάθε x∈ $\mathbb{R}$ (από Δ2α)
(από i & ii έχουμε ότι η f′ διατηρεί πρόσημο ως συνεχής και διάφορη του μηδενός)
iii. f′(0) = 1 > 0

Από i, ii,iii προκύπτει f′(x) > 0 οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Ισχύει ότι $\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|}\leq\frac{\eta\mu x}{f(x)}\leq\frac{1}{|f(x)|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0$. Ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0+0=0$

Δ4. Για το $\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx$ θέτουμε $\ln x=u\Rightarrow\frac{1}{x}dx=du$.

Για x=1 είναι $u=\ln 1=0$ ενώ, για $x=e^{\pi}$ είναι $u=\ln e^{\pi}=\pi$,

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται $\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi} f(u)du$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,π] και γνησίως αύξουσα άρα

$0\leq u\leq\pi\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0)\leq f(u)\leq f(\pi)\Rightarrow 0\leq f(u)\leq\pi$.

Άρα $f(u)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για u=0, οπότε $\int_0^{\pi} f(u)>0$ (1).

Επίσης $\pi-f(u)\geq 0$ και η συνάρτηση $\pi-f(u)$ είναι συνεχής στο [0,π] και δεν μηδενίζεται παντού, αλλά μόνο στο x=π.

Άρα $\int_0^{\pi}(\pi-f(u))du>0\Leftrightarrow\int_0^{\pi}\pi>\int_0^{\pi} f(u)du\Leftrightarrow\int_0^{\pi} f(u)du<\pi(\pi-0)=\pi^2$ (2).

Επομένως από (1),(2) προκύπτει $0<\int_0^{\pi} f(u)du<\pi^2$.

Επιμέλεια: Αθανασιάδης Κώστας